Mascaret.

Demain, dès l'aube, à l'heure où blanchit la campagne,
Je partirai. Vois-tu, je sais que tu m'attends.
J'irai par la forêt, j'irai par la montagne.
Je ne puis demeurer loin de toi plus longtemps.

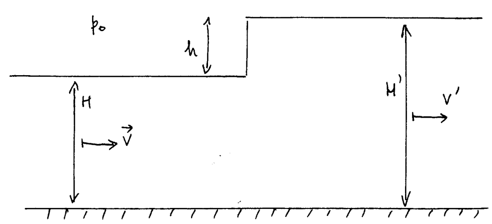
Je marcherai les yeux fixés sur mes pensées,
Sans rien voir au dehors, sans entendre aucun bruit,
Seul, inconnu, le dos courbé, les mains croisées,
Triste, et le jour pour moi sera comme la nuit.

Je ne regarderai ni l'or du soir qui tombe,
Ni les voiles au loin descendant vers Harfleur,
Et quand j'arriverai, je mettrai sur ta tombe
Un bouquet de houx vert et de bruyère en fleur.

Victor HUGO
Les Contemplations

La marée haute engendre à l'embouchure de certains fleuves une vague de hauteur h qui remonte à la vitesse V. On note H la profondeurdu fleuve (et $H' = H + h$) et L sa largeur. Le fleuve s'écoule à la vitesse v_0 en amont de la vague que l'on modélise par une marche rectangulaire .

On se place dans le référentiel lié à la vague. Dans ce référentiel, l'eau du fleuve se déplace à la vitesse V (dans l'autre sens, bien sûr) en amont de la vague et à la vitesse V' en aval (voir figure).



Question 1 :
Pourquoi ce choix de référentiel ?

Tout simplement que le régime y est permanent car la vague y est immobile.

Question 2 :
Quelle relation liant H, H', V et V' traduit la conservation de la masse ?

Prenons comme volume de contrôle la portion de fleuve limité par une section verticale en amont de la vague et une section verticale en aval, sur le schéma celles qui sont matérialisées par les flèches portant les mentions H et H'. Le régime est permanent, donc la masse d'eau qu'il contient est constante et donc le débit massique entrant en amont à travers la surface $S = H\,L$ est égal au débit sortant en aval à travers la surface $S' = H'\,L$, soit en notant μ la masse volumique de l'eau :

$$\mu\,H\,L\,V = \mu\,H'\,L\,V' \quad \text{soit} \quad H\,V = H'\,V'$$

Question 3 :
La pression atmosphérique est notée p_0. On admet qu'en amont comme en aval, la pression de l'eau varie comme en hydrostatique. On note μ la masse volumique de l'eau et g l'intensité de la pesanteur. Faire un bilan de quantité de mouvement à travers un volume

de contrôle judicieusement choisi et en déduire une nouvelle relation entre données et inconnues du problème.

Définissons un système constitué, à l'instant t, du volume de contrôle et de la masse δm_e qui va y entrer entre t et $t + \mathrm{d}t$ et qui sera donc constitué, à l'instant $t + \mathrm{d}t$, du volume de contrôle et de la masse δm_s qui en est sortie entre t et $t + \mathrm{d}t$ et appliquons lui un bilan de quantité de mouvement, en projection sur la direction d'écoulement.

A l'instant t, le volume de contrôle a une quantité de mouvement notée Q^* et la masse $\delta m_e = \mu\, H\, L\, V\, \mathrm{d}t$ une quantité de mouvement $q_e = \delta m_e\, V$, donc la quantité de mouvement du système est

$$Q(t) = Q^* + \mu\, H\, L\, V^2\, \mathrm{d}t$$

A l'instant $t+\mathrm{d}t$, le volume de contrôle a une quantité de mouvement inchangée (régime permanent) et la masse $\delta m_s = \mu\, H'\, L\, V'\, \mathrm{d}t$ une quantité de mouvement $q_s = \delta m_s\, V'$, donc la quantité de mouvement du système est

$$Q(t + \mathrm{d}t) = Q^* + \mu\, H'\, L\, V'^2\, \mathrm{d}t$$

ou encore, en utilisant l'uniformité du débit établie à la question précédente

$$Q(t) = Q^* + \mu\, H\, L\, V\, V'\, \mathrm{d}t$$

on en déduit

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{Q(t + \mathrm{d}t) - Q(t)}{\mathrm{d}t} = \mu\, H\, L\, V\, (V' - V)$$

Cette dérivée temporelle de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces horizontales, c'est à dire des forces de pression sur les différentes faces verticales du système.

Sur la face en amont, la pression vérifie la loi de l'hydrosatique $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\mu\, g$, donc en intégrant avec $p = p_0$ à la surface :

$$p(z) = p_0 + \mu\, g\, (H - z)$$

La pression n'est pas homogène, on obtient la force en intégrant les forces élémentaires sur des bandes de largeur L (celle du fleuve) entre les cotes z et $z + \mathrm{d}z$, donc

$$F_1 = \int_0^H p(z)\, L\, \mathrm{d}z = \left(p_0 + \mu\, g\, \frac{H}{2}\right)\, L\, H$$

où l'intégrale s'obtient sans calcul si l'on remarque subtilement qu'elle revient à calculer l'aire d'un trapèze.

De même, sur la face en aval, en tenant compte que la force est vers l'arrière

$$F_2 = -\left(p_0 + \mu\, g\, \frac{H'}{2}\right)\, L\, H'$$

Enfin, on n'oublie pas que la vague elle-même a une surface $L\,(H' - H)$ soumise à la pression p_0, d'où une troisième force

$$F_3 = p_0(H' - H)$$

$$F_{tot} = F_1 + F_2 + F_3 = \mu\, g\, \frac{H^2 - H'^2}{2}\, L$$

Le principe fondamental $\dot{Q} = F_{tot}$ donne après simplification par $\mu\, L$:

$$H\, V\, (V' - V) = g\, \frac{H^2 - H'^2}{2}$$

Question 4 :
En déduire une expression de V en fonction de g, H et h. Que devient cette expression si $h \ll H$?

La conservation du débit entraîne que $V' = H\,V\,H'$ que l'on reporte dans la dernière relation

$$g\,\frac{H^2 - H'^2}{2} = H\,V\,(\frac{H\,V}{H'} - V) = H\,V^2\left(\frac{H}{H'} - 1\right) = H\,V^2\left(\frac{H - H'}{H'}\right)$$

Après simplification par $H - H'$ (on se souvient de ses identités remarquables !)

$$V^2 = g\,\frac{(H + H')\,H'}{2\,H}$$

on en déduit

$$V'^2 = g\,\frac{(H + H')\,H}{2\,H'}$$

et si $H' - H \ll H$ soit $H' \approx H$

$$V = \sqrt{g\,H}$$

A titre d'exemple, pour un fleuve de dix mètres de profondeur ($H = 10$ m) avec $g \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, on $V = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 36\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, ce qui est considérable.

Question 5 :
A quellle condition sur v_0, vitesse d'écoulement du fleuve, le mascaret peut-il remonter celui-ci ?

Dans le référentiel lié à la vague, le fleuve en amont a une vitesse relative V et dans le référentiel lié au sol, il a une vitesse absolue notée v_0 , la vitesse d'entraînement est donc $V - v_0$. La vague a une vitesse relative nulle par construction et donc une vitesse absolue opposée à la vitesse d'entraînement soit $v_0 - V$; la vague remonte le fleuve si celle-ci est négative soit si

$$v_0 < \sqrt{g\,H} \quad \text{ou} \quad \frac{v_0}{\sqrt{g\,H}} < 1$$

Le rapport $v_0/\sqrt{g\,H}$ s'appelle le nombre de Froude.

Question 6 :
On néglige v_0. La première vague faisant passer la profondeur de H à H' est suivie d'une seconde faisant passer la profondeur de H' à H''. Que se passe-t-il ? En déduire la genèse de vagues énormes.

Puisque la première vague a pour vitesse $\sqrt{g\,H}$ et la seconde $\sqrt{g\,H'} > \sqrt{g\,H}$ car $H' > H$, la seconde rattrape la première et forme donc avec elle une vague unique où la profondeur passe de H à H''. Une grosse vague s'est en fait formée par un ensemble de petites vagues successives, les dernières rattrapant les premières.

Question 7 :
Grâce à un bilan énergétique, calculer la puissance dissipée par les forces intérieures.

On raisonne comme pour le bilan de quantité de mouvement mais avec l'énergie mécanique (cinétique plus potentielle de gravité) sans oublier que l'énergie potentielle d'une masse non ponctuelle fait intervenir l'altitude de son *centre de gravité*, situé à mi-hauteur pour δm_e et δm_s

$$E(t) = E^* + \mu\,H\,L\,V\,\mathrm{d}t\left(\frac{V^2}{2} + g\,\frac{H}{2}\right)$$

$$E(t + \mathrm{d}t) = E^* + \mu\,H\,L\,V\,\mathrm{d}t\left(\frac{V'^2}{2} + g\,\frac{H'}{2}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\mu\,H\,L\,V\,[(V'^2 - V^2) + g\,(H' - H)]$$

On simplifie en reportant les expressions de V^2 et V'^2 dans le crochet

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\mu\,H\,L\,V\,\left[\frac{g\,(H + H')\,(H^2 - H'^2)}{2\,H\,H'} + g\,(H' - H)\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\mu\,g\,H\,L\,V\,(H' - H)\,\left[-\frac{(H + H')^2}{2\,H\,H'} + 1\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\,\mu\,g\,H\,L\,V\,(H' - H)\,\left[\frac{H^2 + H'^2}{2\,H\,H'}\right]$$

Par ailleurs, les forces F_1, F_2 et F_3 s'exercent respectivement sur des parois de vitesses V, V' et 0 donc la puissance des forces extérieures est

$$P_{ext} = F_1\,V + F_2\,V' = p_0\,L\,(H\,V - H'\,V') + \frac{1}{2}\,\mu\,g\,L(H^2\,V - H'^2\,V')$$

or $H\,V = H'\,V'$ donc

$$P_{ext} = \frac{1}{2}\,\mu\,g\,H\,L\,V\,(H - H')$$

par différence, la puissance des forces intérieures, négative et dissipée dans les tourbillons du mascaret est

$$P_{int} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} - P_{ext} = \frac{1}{2}\,\mu\,g\,H\,L\,V\,(H' - H)\,\left[-\frac{H^2 + H'^2}{2\,H\,H'} + 1\right]$$

$$P_{int} = -\frac{\mu\,g\,H\,L\,V\,(H' - H)^3}{4\,H\,H'}$$

Par exemple avec $H' = 11$, $H = 10$ m et $L = 100$ m, on trouve après le calcul de V et avec $\mu = 10\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ que la puissance perdue est de 222 kW, c'est énorme !

Question 8 :
Quel rapport avec le poème ?

Sept mois après son mariage, le 4 septembre 1843, Léopoldine Hugo âgée de dix-ans et son mari se noient dans la Seine près de Villequier dans le naufrage de leur barque dû possiblement au mascaret. La construction du port du Havre a fait disparaître ce phénomène.